**Министерство труда, занятости и трудовых ресурсов**

**Новосибирской области**

**Государственное автономное профессиональное**

**образовательное учреждение Новосибирской области**

**«Новосибирский колледж парикмахерского искусства»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**для выполнения самостоятельных работ**

**по общеобразовательной учебной дисциплине «Математика»**

**(ФГОС СОО предметная область «Математика и информатика»)**

***ПРОФЕССИЯ СПО 43.01.02 ПАРИКМАХЕР***

***УКРУПНЕННАЯ ГРУППА ПРОФЕССИЙ 43.00.00 СЕРВИС И ТУРИЗМ***

**Новосибирск, 2016**

Методические указания для выполнения самостоятельных работ разработаны в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по профессии 43.01.02 «Парикмахер» для рабочей программы общеобразовательной учебной дисциплины «Математика».

**Разработчик:**

ГАПОУ НСО «Новосибирский колледж парикмахерского искусства»,

преподаватель математических дисциплин 1КК Садовский С.В.

Рассмотрены на заседании методической комиссии преподавателей ООД, рекомендовано к печати Методическим советом колледжа

© ГАПОУ НСО «Новосибирский колледж парикмахерского искусства», 2016.

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Стр.** |
| Пояснительная записка…………………………………………………………………… | 3 |
| Тема. Действительные числа. Комплексные числа и действия с ними……………. | 4 |
| Тема. Функции, их свойства и графики………………………………………………. | 9 |
| Тема. Тригонометрия…………………………………………………………………… | 14 |
| Тема. Показательные уравнения……………………………………………………….. | 17 |
| Тема. Логарифм числа………………………………………………………………….. | 18 |
| Тема. Решение логарифмических уравнений…………………………………………. | 19 |
| ТЕМА. Производная функции …………………………………………………….. | 20 |
| Тема. Определенный интеграл…………………………………………………………. | 24 |
| ТЕМА. Первообразная функции………………………………………………………… | 26 |
| ТЕМА. Площадь криволинейной трапеции…………………………………………….. | 26 |
| ТЕМА. Показательные уравнения……………………………………………………….. | 27 |
| Тема. Логарифм числа…………………………………………………………………... | 27 |
| Тема. Логарифмические уравнения……………………………………………………. | 27 |
| Тема. Вычисление определенных интегралов………………………………………… | 28 |
| ТЕМА. Основы интегрального исчисления……………………………………………... | 32 |
| Тема. Вычисление площадей плоских фигур………………………………………… | 32 |
| Тема. Геометрия…………………………………………………………………………. | 34 |
| Тема. Элементы теории вероятностей и математической статистики……………… | 36 |
| Рекомендуемая литература……………………………………………………………….. | 44 |

**Пояснительная записка**

В самостоятельной работы студентов содержатся задачи, связанные с темами: производная функции; первообразная функции; определенный интеграл; показательные уравнения; логарифм; логарифмические уравнения; элементы теории вероятностей и математической статистики.

Работа студентов оценивается «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно» либо «зачет»/ «незачет»

***Положительная оценка выставляется за работу (ответ)*** адекватно отражает ***признание факта усвоения студентом программного учебного материала.*** С целью обеспечения адекватной и объективной оценки знаний, умений и навыков студентов по результатам работ студентов приняты ***следующие критерии:***

* оценка *«отлично»* выставляется тогда, когда из работы (ответа) ясно, что студент глубоко и прочно освоил программный материал, умеет применить теорию (законы, правила)к решению задач, содержание работы (ответа) изложено исчерпывающе полно, последовательно, четко и логически стройно, без каких-либо неточностей;
* оценка *«хорошо»* выставляется тогда, когда из работы (ответа) ясно, что студент твердо знает программный материал, правильно применяет теоретические положения при решении задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения, а содержание работы (ответа) изложено грамотно, без существенных неточностей в ответе на вопросы;
* оценка *«удовлетворительно»* выставляется тогда, когда из работы (ответа) ясно, что студент имеет знания основного программного материала, но не усвоил его деталей, испытывает затруднения при выполнении практических работ, в работе (ответе) допущены неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала;
* оценка *«неудовлетворительно»* выставляется тогда, когда из работы (ответа) ясно, что студент не знает значительной части программного материала, неуверенно и с большими затруднениями выполняет практические работы, а в изложении работы (ответа) допущены существенные ошибки.

Зачетные работы оцениваются оценками «освоен» или «не освоено»:

* оценка *«зачет»* соответствует критериям оценок на работы (ответ) от «отлично» до «удовлетворительно»;
* оценка *«не зачет»* соответствует критерию оценки на работу «неудовлетворительно».

**Тема. Действительные числа. Комплексные числа и действия с ними**

**Цель:** сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами.

**Теоретические сведения к самостоятельной работе**

*Комплексное число* – это выражение вида

, (1.1)

где *x, y* – вещественные числа, а  – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, *x*, называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение ); второе, *y*, - *мнимой частью* (). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Если *х =* 0, то комплексное число *iy* называется *чисто мнимым.*

Если *y =* 0, то комплексное число *x+* *iy* = *х* и называется *действительным.* Если *х =* 0, у=0 одновременно, то комплексное число *z =* 0+0*i=*0 *.*

Два комплексных числа *равны*, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице.

Числом, *сопряженным* к , называют число вида . Используя формулу разности квадратов, получаем, что . Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

**Пример 1.** Решить уравнение .

*Решение*. Дискриминант данного уравнения:  меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

, т.е. ; .

Справедливы следующие *правила арифметических действий над комплексными числами*  и :

1)  (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2)  (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что );

3)  (эта операция возможна только в случае, когда ).

Пример 2. Вычислить и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

*Решение*. Действуя в соответствии с правилами получаем:

;

поэтому , .

*Геометрическая (тригонометрическая) форма комплексного числа*

Каждому комплексному числу вида

*z = x + iy* (1.1) можно поставить в соответствие точку *Z(x;y)* на декартовой плоскости (при этом на оси *OX* располагаются вещественные числа *z=x+i0 = x*, а на оси *OY* – чисто мнимые числа *z=0+iy =iy*).

Комплексное число можно задать с помощью радиус-вектора = с началом в точке (о;о) и концом *z*(х;у).



*Модулем комплексного числа* называется длина отрезка  (или расстояние от начала координат до точки *Z*), т.е.

r = = .



*Аргументом комплексного числа* () называется угол, который вектор образует с положительным направлением оси OX. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию .



= ; = x = r



y = r



При этом выражение вида z = x + iy =

= ri r= r () или



 (1.2)

называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

Преобразуем (1.1)



и, сравнивая с (1.2), получаем, что аргумент *z* можно найти, решив систему

 или  (1.3.)

**Пример 3.** Записать комплексное число в тригонометрической форме , указать модуль и аргумент комплексного числа.

*Решение*. По определению . Для определения аргумента воспользуемся формулой: . Получаем, что . Тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид: .

*Возведение в степень и извлечение корней.* Если комплексное число задано тригонометрической формой , то справедлива формула Муавра

. (1.4)

Для извлечения корня *n*-й степени (*n* – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая *n* значений этого корня:

, *k=0,1,…,n-1.* (1.5)

**Пример 4.** Вычислить: a) ; b) .

*Решение*. В задании a), чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме. Имеем: ,  и , т.е.  (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно,  и  (в силу (1.4)). Учитывая, что  и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

.

В задании b) тригонометрическая форма заданного числа имеет вид  (*|z|=1*), поэтому в силу (1.5)

, *k=0,1,2*.

Выписываем три искомых корня:

;

;

.

**Самостоятельные работы**

**Задание 1**. Вычислить, выписать вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел.

1)  2)  3) 

4)  5)  6) 

**Задание 2**. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической форме: 1) ; 2) ; 3) ; 4) ; 5) ;

6) ; 7) .

**Задание 3**. Найти все корни уравнений:

1) ; 2) ; 4) ;

5) ; 6)  7) 

**Дополнительные задания**



**Тема. Функции, их свойства и графики**

**Цель:** сформировать умение использовать свойства функции для ее исследования, решать задачи и упражнения по данной теме.

**Теоретические сведения к самостоятельной работе**

Если каждому элементу х из множества Х по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент у множестваY, то говорят, что на множестве Х определена функция со значениями в множестве Y, и записывают y=f(х).

Множество Х называется областью определения функции D(f), а множество Y – областью значений функции E(f).

**Пример 1.** Найти область определения функции



*Основные свойства функции*

1. Четность и нечетность. Функция y=f(x) называется четной, если для любых значений х из области определения f(-x)=f(x), и называется нечетной, если f(-x)=-f(x). В противном случае функция y=f(x) называется функцией общего вида.

**Пример 2.** Установить четность или нечетность функции.



1. Монотонность. Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке Х из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.
2. Ограниченность. Функция y=f(x) называется ограниченной на некотором промежутке Х из области определения, если существует число М>0, такое, что  для любого .
3. Периодичность. Функция y=f(x) называется периодической с периодом Т>0, если для любых значений х из области определения f(x+T)=f(x-T)=f(x).

Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция спроса, и пишут q=f(p).

Эта функция определена для тех значений , для которых  и множество ее значений .

График функции спроса называют кривой спроса.

**Пример 3.** Функция спроса на некоторый товар имеет вид , где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

* Область определения и множество значений этой функции
* Функцию цены в виде 
* Объем спроса при ценах на товар: 
* Цену за единицу товара, если ,
* Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Решение: 1) Получим систему неравенств:



Выразим значение p через q:



Из закона спроса следует, что с увеличением цены р от нуля до 3500 руб. спрос должен падать. В нашем случае функция q убывает в промежутке , следовательно, множество значений функции .

1. Функция цены имеет вид 
2. 
3. 
4. Выручка от продажи составляет , следовательно,



Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое производители готовы продать по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция предложения, и пишут q=φ(p).

Эта функция определена для тех значений , для которых  и множество ее значений .

**Пример 4.** Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид , где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

* Область определения и множество значений функции q
* Объем предложения при ценах за единицу товара: 
* Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию 

*Решение:* 1) Найдем область определения:



Множество значений функции q при  будет .

1. При 
2. Найдем функцию 



**Самостоятельные работы**

**Задание 1.** Найти область определения функции



**Задание 2.** Установить четность или нечетность функции.



**Задание 3.** а) Функция спроса на некоторый товар имеет вид , где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

* Область определения и множество значений этой функции
* Функцию цены в виде 
* Объем спроса при ценах на товар: 
* Цену за единицу товара, если ,
* Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

б) Функция спроса на некоторый товар имеет вид , где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

* Область определения и множество значений этой функции
* Функцию цены в виде 
* Объем спроса при ценах на товар: 
* Цену за единицу товара, если ,
* Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

**Задание 4.** а) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид , где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

* Область определения и множество значений функции q
* Объем предложения при ценах за единицу товара: 
* Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию 

б) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид , где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

* Область определения и множество значений функции q
* Объем предложения при ценах за единицу товара: 
* Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию 

**Тема. Тригонометрия**

Для выполнения задания необходимо знать:

1. Определение и основные свойства тригонометрических функций.
2. Основные тригонометрические тождества.
3. Формулы двойных и половинных углов.
4. Обратные тригонометрические функции.
5. Тригонометрические уравнения .

Задания

1. Преобразование тригонометрических выражений и нахождение их значений.
2. Тригонометрические тождества.
3. Тригонометрические уравнения.

Рекомендуемая литература:

1. А.Н. Колмогоров. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 класса средней школы.- М.: Просвещение, 2010 г.

**Самостоятельные работы**

**Вариант 1.**

1. Вычислите значение выражения , предварительно упростив его, при sin = 0,5 и  < α < .



1. Докажите тождество:



1. Решите уравнения:

а) 7sinx-3cos2x=0,

б) 4sin2x+2cos2x-3sin2x=0.

**Вариант 2.**

1. Вычислите значение выражения, предварительно упростив его, при sin = - 0,5 .



1. Докажите тождество:



1. Решите уравнения:

а) 2cos2x + 4sin2x = 3,

б) sin2x + sinx cosx - cos2x = 2.

**Вариант 3.**

1. Вычислите значение выражения, предварительно упростив его, при tgα = 5/2.



1. Докажите тождество:

 2sin2x + cos2x = 1.

1. Решите уравнения:

а) 4cos2x - cosx = 0,

б) cos2x + 6sinx - 5 = 0.

**Вариант 4.**

1. Вычислите значение выражения, предварительно упростив его, при cos =-3/5 и  < α < .

tgα + ctgα

1. Докажите тождество:



1. Решите уравнения:

а) cos2x = cosx,

б) 4sin2x+2cos2x-3sin2x=0.

**Вариант 5.**

1. Вычислите значение выражения, предварительно упростив его, при sin = - 5 /13.

.

1. Докажите тождество:



1. Решите уравнения:

a) 

б) cos2x + 6sinx – 5 = 0.

**Вариант 6.**

1. Вычислите значение выражения, предварительно упростив его, при cos = -12/13.

sin2α + tg2α + cos2α.

1. Докажите тождество:



1. Решите уравнения:

а) 1 + cos2x=2cosx,

б) 3sin2x + 5cosx - 4 = 0.

**Вариант 7.**

1. Вычислите значение выражения, предварительно упростив его, при cos = - 4/5.



1. Докажите тождество:



1. Решите уравнения:

а) cos2x – 5sinx = 3,

б) sin2x+sinx cosx - cos2x=2.

**Вариант 8.**

1. Вычислите значение выражения, предварительно упростив его, при sin = 3/5 и  < α < .



1. Докажите тождество:



1. Решите уравнения:

а) sinx - sin2x = 0,

б) 2sin2x+5cosx - 4 = 0.

**Вариант 9.**

1. Вычислите значение выражения, предварительно упростив его, при tg = 3.



1. Докажите тождество:



1. Решите уравнения:

а) sinx + cos2x = 1/4,

б) 

**Вариант 10.**

1. Вычислите значение выражения, предварительно упростив его, при ctg = ; π < α < 3π/2.



1. Докажите тождество:



1. Решите уравнения:

а) 1 – cos2x = 2sinx,

б) 7sin2x+3cos2x = 8sinx.

**Тема. Показательные уравнения**

Способы решения показательных уравнений можно представит, рассматривая два вида уравнений:

**1)** , где -функциональные выражения

произвольного вида, а число >0 и .Тогда равенство

показательных выражений левой и правой части уравнений

приводит к равенству , которое представляет собой

алгебраическое уравнение, способы решения которого известны.

**Пример 1**. 

Преобразуем левую часть уравнения, используя равенства

. Уравнение принимает вид:

 **2)** , то есть неизвестная величина в уравнении

представлена показательной функцией . Введем новую

переменную (заметим, что  >0, так как >0 при

любых значениях ). Далее, будем решать алгебраическое

уравнение  и находить значения (одно или более,

зависит от вида уравнения). Затем,

.

**Пример 2**. 

Заменим: , учтем, что. Уравнение будет иметь



**3)** Наиболее сложными являются показательные уравнения, содержащие две показательные функции с разными основаниями. Для их решения необходимо правильно выбрать алгебраические преобразования, которые приводят уравнение к виду с одной показательной функцией.

Рассмотрим решение уравнения такого типа.

**Пример 3.** 

Преобразуем , , , . Уравнение содержит показательные функции: 1) с основанием 2, степени которых  и ; 2) с основанием 5, степени которых  и . Выберем показательные выражения с меньшими степенями, то есть  и ; разделим левую и правую части уравнения почленно на произведение . Получим . Преобразуем и получим результат: , где ; . Заменим  и запишем алгебраическое уравнение  или . Кубическое уравнение решается подбором корня . Остаток от деления многочленов  и  равен . Уравнение  не имеет решения в области вещественных чисел. Поэтому единственный корень  определяет  или ; .

**Тема. Логарифм числа**

При вычислении логарифма числа, обозначенного , где , необходимо знать его свойства:



**Пример 1.** Вычислить: ;

**а)** Представим 

**б)** Продолжим вычисления, используя представленные

преобразования:



**Пример 2.** Вычислить: 

Преобразуем, используя свойства логарифма числа:



**Тема. Решение логарифмических уравнений**

С помощью логарифмических свойств и алгебраических преобразований логарифмические уравнения сводятся к двум видам:

**1)** . Из равенства логарифмов с одним и тем же основанием следует равенство , которое требует решения алгебраического уравнения. Для получения правильного решения логарифмического уравнения необходимо сделать проверку полученного решения алгебраического уравнения, так как необходимо, чтобы .

**2)** . Замена переменной:  приводит к

решению алгебраического уравнения . Получив решение

 , переходят к решению уравнения

, то есть . Полученное

решение проверяется условием .

**Пример 1.** 

**а)** Преобразуем левую часть уравнения

. (Использованы равенства:

).

**б)** Приводим полученное выражение к общему знаменателю:

или .

Проверкой подтверждается только решение .

Необходимо преобразовать:

****

После этого выполнять действия, подобные тем, что были при решении задачи 1.

**Пример 2.** 

**а)** Заменим 

**б)** 

**в)** 

**ТЕМА. Производная функции**

**Самостоятельные работы**

1.В каких точках касательные к графику функции имеют угол наклона к оси ОХ, равный 45°? Напишите уравнения этих касательных.

Ответ:  при x=1;  при x=-2.

2. В каких точках касательные к графику функции y=0,5arcsinx имеют угол наклона к оси ОХ, равный 30°?

Ответ: (0,5;); (-0,5;-);

3. На параболе y=x2 взяты две точки с абсциссами  Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней параллельна проведенной секущей?

Ответ: (2;4).

4. На графике функции y=x2 найти точку, касательная к которой перпендикулярна прямой x+2y+1=0.

Ответ: (1;1).

5. Тело массой 100 ед. движется прямолинейно по закону s(t)=2t2+3t+1. Определить кинетическую энергию тела  через t=5сек. после начала движения.

Ответ: 26450.

6. Найти значение функции в точке ее минимума:

 Ответ: 27.

7. Найти угловой коэффициент прямой, соединяющей точки экстремума функции y=x3-6x2+9x+1.

Ответ: -2.

8. Найти минимальное целое значение параметра **к**, при котором функция y=x3+5x2+kx+6 не имеет экстремума.

Ответ: 9.

В задачах 9,10 найти производную функции f(x), затем вычислить ее значение в заданной точке :

9.; . Ответ: 1.

10.; . Ответ:0.

*Производная функции, и ее приложения*

Наиболее сложными задачами в данной теме являются задачи, в которых необходимо использовать геометрический или механический смысл производной, а также задачи на исследование функции. Необходимо знать, что:

1)  - производная функции , вычисленная в точке

, равна тангенсу угла α наклона касательной,

проведенной к графику функции в точке с координатами

, где .

2) уравнение касательной к графику функции в точке с координатами

() может быть записано в виде  Также

полезно знать, что уравнение прямой через две известные точки с

координатами ( может быть записано в виде

. Алгебраическими преобразованиями можно

данное уравнение привести к виду , где - угловой

коэффициент прямой.

3) - скорость движения материальной точки, вычисленная в

момент времени .

4) Решение неравенства >0 и <0 определяет интервалы

монотонного возрастания и убывания функции, соответственно.

Эти интервалы должны принадлежать области определения

функции.

5) Условие =0 определяет точку , в которой функция

достигает своего максимума или минимума, если эта точка

принадлежит области определения функции  и

производная функции в окрестности точки  меняет знак, то

есть >0, а <0 или наоборот, где δ - малое

положительное значение

**Пример 1**. В каких точках касательные к графику

функции имеют угол наклона к оси ОХ,

равный 45°? Напишите уравнения этих касательных.

а) Найдем производную функции:

б) По условию задачи угол наклона касательных к графику

функции должен быть равен ,то

есть

в) Решим уравнение



и вычислим значение 

г) Запишем уравнение касательных:

при 

при 

**Пример 2**. На параболе y=x2 взяты две точки с абсциссами 

Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней параллельна проведенной секущей?

а) Определим уравнение секущей, используя уравнение

прямой, проходящей через две известные точки. Для этого

вычислим  Уравнение

секущей:

; Угловой коэффициент этой прямой

равен 4 (множитель перед , если ).

б) Параллельные прямые имеют одинаковые угловые

коэффициенты.

Поэтому производная функции y=x2 должна быть равна 4,

то есть  Окончательно,

получаем ответ:(2;4)

Для решения задачи 4 блока 5 необходимо использовать условие перпендикулярности двух прямых  и  в виде



**Пример 3**. Найти угловой коэффициент прямой, соединяющей точки

экстремума функции y=x3-6x2+9x+1.

а) Найдем точки экстремума функции. Для этого приравняем

нулю производную функции y=x3-6x2+9x+1 и решим

уравнение . В окрестности точек

 производная меняет знак, точки принадлежат

области определения функции (-∞;∞) и являются точками

экстремума.

б) Вычислим  Запишем

уравнение прямой, проходящей через две известные точки с

координатами (1;5) и (3;1) .

Угловой коэффициент прямой равен (-2).

**Пример 4**. Найти минимальное целое значение параметра **к**, при котором

функция y=x3+5x2+kx+6 не имеет экстремума.

а) Найдем производную функции y=x3+5x2+kx+6. Так как по

условию задачи функция не должна иметь экстремума, то

≠0, то есть .

б) Уравнение  не имеет решения, если

дискриминант<0, то есть >. Минимальное

целое значение данного неравенства .

**Тема. Определенный интеграл**

Для решения задач, связанных с первообразной функции (неопределенным интегралом) и определенным интегралом, необходимо знать:

1) таблицу неопределенных интегралов в объеме









2) свойства неопределенного интеграла

, где - числовой коэффициент.



, где  - первообразная

функции , а - линейная функция.

3). Вычисление определенного интеграла

представляет собой нахождение числа, равного разности значений

первообразной функции в точках верхнего и нижнего пределов

определенного интеграла. Это же числовое значение определяет

площадь криволинейной трапеции, вид которой можно найти в

любом учебнике. Для вычисления площади фигуры, заключенной

между графиками функций  необходимо

определить значения  как абсциссы точек пересечения

графиков : - решить уравнение или

определить их из условия задачи. В любой точке 

вычислить . Если, допустим,>, то

площадь фигуры равна .

**Пример 1**. Найти первообразную функций f(x), проходящую через

точку М0 с координатами x0,y0:

 (задача 17 блока 6)

а) Найдем первообразную функции: 

(аргументом степенной функции является линейная функция

, где =-1)

.

б) Используя условие задачи , то есть ,

получим уравнение для определения значения постоянной

интегрирования : -1=-8+; Окончательно,

.

**Пример 2**. Вычислить площадь фигуры, заключенной между

указанными линиями: y=2x; y=x; x=5.

а) Функции: y1=2x; y2=x пересекаются в точке с абсциссой

x=0 (2x=x), то есть (нижний предел определенного

интеграла, который определит искомую площадь фигуры).

Значение  определено условием задачи. Тогда

. Вычислим . Значит

.

**Пример 3**. Вычислить площадь фигуры, заключенной между

линиями: y=x2-x; y=2x.

а) Найдем точки пересечения функций y1=x2-x; y2=2x:

.

б) Вычислим . Тогда 



**ТЕМА. Первообразная функции**

**Самостоятельные работы**

В задачах 1-5 найти первообразную функций f(x), проходящую через точку М0 с координатами x0,y0:

1. ;; Ответ: .

2.  Ответ: .

3.  Ответ: 7-.

4. ;; Ответ: .

5.  Ответ: 7-.

**ТЕМА. Площадь криволинейной трапеции**

**Самостоятельные работы**

В задачах 6-10 вычислить площадь фигуры, заключенной между указанными линиями:

6. y=x3; y=1; x=2. Ответ: 11/4.

7. y=; y=2; x=9. Ответ: 8/3.

8. y=2x; y=x; x=5. Ответ: 25/2.

9. y=x3; y=1; x=2. Ответ: 11/4.

10. y=2x; y=x; x=5. Ответ: 25/2.

**ТЕМА. Показательные уравнения**

**Самостоятельные работы**

Решить уравнения:

1. ; Ответ: -1;5.

2. ; Ответ: 2.

3. ; Ответ: -2;-1.

4.; Ответ: 2.

5. ; Ответ: 0.

6. ; Ответ: 0.

**Тема. Логарифм числа**

**Самостоятельные работы**

Вычислить логарифмы чисел:

1.; Ответ: 2.

2.; Ответ: 3.

3. ; Ответ: 10.

4. ; Ответ: 3.

**Тема. Логарифмические уравнения**

**Самостоятельные работы**

Решить уравнения:

1.; Ответ: 4.

2. ; Ответ: 2.

3.; Ответ: 4.

4.; Ответ: 5.

5. ; Ответ: 100.

6.; Ответ: 4.

7. ; Ответ: 2.

8.; Ответ: 4.

9.; Ответ: 5.

10. ; Ответ: 100

**Тема. Вычисление определенных интегралов**

**Цель:** сформировать умение вычислять определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

**Теоретические сведения к самостоятельной работе**

*Определенный интеграл, его вычисление и свойства*

*Определенный интеграл*от функции, непрерывной на отрезке , вычисляется по формуле:

 (1)

где — первообразная для функции , т. е. 

Формула (1) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

*Свойства определенного интеграла*:

 







6) Если  для всех , то 

7) Если  для всех , то 

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

 (2)

где  — обратная к  функция.

Формула интегрирования по частям приобретает вид:

 (3)

*Пример 4.* Вычислить определенный интеграл 

*Решение.*



*Основы интегрального исчисления*

Для решения задач, связанных с первообразной функции (неопределенным интегралом) и определенным интегралом, необходимо знать:

1) таблицу неопределенных интегралов в объеме









2) свойства неопределенного интеграла

, где - числовой коэффициент.



, где  - первообразная

функции , а - линейная функция.

3). Вычисление определенного интеграла

представляет собой нахождение числа, равного разности значений

первообразной функции в точках верхнего и нижнего пределов

определенного интеграла. Это же числовое значение определяет

площадь криволинейной трапеции, вид которой можно найти в

любом учебнике. Для вычисления площади фигуры, заключенной

между графиками функций  необходимо

определить значения  как абсциссы точек пересечения

графиков : - решить уравнение или

определить их из условия задачи. В любой точке 

вычислить . Если, допустим,>, то

площадь фигуры равна .

**Пример 1**. Найти первообразную функций f(x), проходящую через

точку М0 с координатами x0,y0:

 (задача 17 блока 6)

а) Найдем первообразную функции: 

(аргументом степенной функции является линейная функция

, где =-1)

.

б) Используя условие задачи , то есть ,

получим уравнение для определения значения постоянной

интегрирования : -1=-8+; Окончательно, .

**Пример 2**. Вычислить площадь фигуры, заключенной между

указанными линиями: y=2x; y=x; x=5.

а) Функции: y1=2x; y2=x пересекаются в точке с абсциссой

x=0 (2x=x), то есть (нижний предел определенного

интеграла, который определит искомую площадь фигуры).

Значение  определено условием задачи. Тогда

. Вычислим . Значит

.

**Пример 3**. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линиями: y=x2-x; y=2x.

а) Найдем точки пересечения функций y1=x2-x; y2=2x:

.

б) Вычислим . Тогда 



**Самостоятельные работы**

**Задание 1**. Вычислить определенный интеграл.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

**ТЕМА. Основы интегрального исчисления**

**Самостоятельные работы**

В задачах 1-5 найти первообразную функций f(x), проходящую через точку М0с координатами x0,y0:

1. ;; Ответ: .

2.  Ответ: .

3.  Ответ: 7-.

4. ;; Ответ: .

5.  Ответ: 7-.

В задачах 6-10 вычислить площадь фигуры, заключенной между указанными линиями:

6. y=x3; y=1; x=2. Ответ: 11/4.

7. y=; y=2; x=9. Ответ: 8/3.

8. y=2x; y=x; x=5. Ответ: 25/2.

9. y=x3; y=1; x=2. Ответ: 11/4.

10. y=2x; y=x; x=5. Ответ: 25/2.

**Тема. Вычисление площадей плоских фигур**

**Цель:** сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей плоских фигур.

**Теоретические сведения к самостоятельной работе**

*Определенный интеграл*от функции, непрерывной на отрезке , вычисляется по формуле:

 (1)

где — первообразная для функции , т. е. 

Формула (1) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

*Площади плоских фигур*

*1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат*

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями  , где  для всех , и прямыми , , то ее площадь вычисляется по формуле:

 (4)

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Рис. 1 | Рис. 2 |

**Пример 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:



*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | –1 | 2 | –2 | 3 | –3 | 4 | –4 |
| y | –2 | –1 | –1 | 2 | 2 | 7 | 7 | 14 | 14 |

Для построения прямой достаточно двух точек, например  и .

Найдем координаты точек  и  пересечения параболы  и прямой .

Для этого решим систему уравнений



Тогда  Итак, 

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (4), в которой

 поскольку  для всех . Получим:



**Самостоятельные работы**

**Задание 1**. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

**Тема. Геометрия**

**Самостоятельные работы**

Найти:

1) Координаты вершин треугольника;

2) Периметр треугольника;

3) CosА;

4) Периметр треугольника АВС.

Точки пересечения прямых, на которых лежат стороны – вершины треугольника. Берем попарно уравнения и находим координаты вершин.

3х + 7у – 5 + 0, А (-3; 2). х – 5у + 13 = 0, С (2; 3).

х – 5у + 13 = 0; 2х + у – 7 = 0;

3х + 7у – 5 = 0, В (4; -1).

2х + у – 7 = 0;

Р = АВ + ВС + АС;

Р = || + || + ||;

|| = ;

хв и ув - координаты В;

ха и уа – координаты А.

АВ = = ;

ВС =  =  = 2;

АС =  = ;

РАВС =  +  + 2.

С (2; 3)

В (4; -1) А (-3; 2)

сosВ = ;

а = {х1; у1}; в = {х2; у2};

 = ;

 определяется  и . Найдем их координаты.

 = ;

 = ;

 = ;

 = ;

сosВ = сos(ВС; ВА) =  =  = 0,8221.

S = 0,5авsin, а и в – длины сторон треугольника,  - угол между ними.

sin2 + сos2 = 1;

sin = ;

sinВ = = 0,5693;

S∆ = 0,5‌|‌‌| ∙ || · sinВ = 0,5 ∙2··0,5693 = 9,69 (кв. ед.).

Ответ: А (-3;2), В (4;-1), С (2;3); Р = (++) ед.; сosВ = 0,8221; S = 9,69 кв. ед.

**Тема. Элементы теории вероятностей и математической статистики**

**Цель:** сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей.

**Теоретические сведения к самостоятельной работе**

*Классическое определение вероятности*

В разделе математики, который называется комбинаторикой, решаются задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств. В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: размещения, перестановки, сочетания. Комбинаторика и теория вероятностей находят широкое практическое применение во многих вопросах естествознания и техники.

*Размещения*

Комбинации из n элементов по m элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются размещениями.

Из определения вытекает, что 0≤ m ≤ n и что размещения из n элементов по m – это все m – элементарные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Размещения обозначаются символом = n(n-1)(n-2)…(n-m+1)



n – число всех имеющихся элементов,

m – число элементов в каждой комбинации.

Для краткости произведение первых n натуральных чисел принято обозначать n! (n –факториал): 1 n = n! Условились считать, что 0! = 1.



Формулу числа размещений из n элементов по m элементов можно записать в другом виде: . Считают, что = 1.



**Пример 1.** Сколькими способами из группы, включающей 25 учащихся, можно выбрать актив группы из 3 человек?

*Решение:*

Состав актива группы является упорядоченным множеством из 25 элементов по 3 элемента. Искомое число способов равно числу размещений из 25 элементов по 3 элемента в каждом:

= 25



или .



*Перестановки*

Размещения из n элементов по n элементов называются перестановками из n элементов. Перестановки являются частным случаем размещений. Т. к. каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов. Число перестановок из n элементов данного множества обозначают Рn  и вычисляют по формуле: Рn  = 1 n = n!



**Пример 2.** Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3,4 без повторений?

*Решение:*

Дано множество из 4 элементов, которые требуется расположить в определенном порядке, т. е. требуется найти количество перестановок из 4 элементов: Р4  = 1 = 24, т. о. из цифр 1, 2, 3,4 можно составить 24 четырехзначных числа (без повторений цифр).



*Сочетания*

Сочетаниями называются все возможные комбинации из n элементов по m, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (m и n- натуральные числа, m ≤ n). Число сочетаний из n элементов по m элементов в каждом, обозначают символом и вычисляют по формуле: или .



Основное свойство сочетаний (0≤ m ≤ n).



**Пример 3**. Сколькими способами можно распределить 12 человек по бригадам, если в каждой бригаде по 6 человек?

*Решение:*

Состав каждой бригады является конечным множеством из 12 элементов по 6. Искомое число способов равно числу сочетаний из 12 элементов по 6 в каждом: = 924.



Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

*Вероятностью* Р(А) события А в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию А, к числу n всех исходов испытания.



**Пример 4**. В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

*Решение:*



*Аксиомы вероятностей*

Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число Р(А), называемое вероятностью события А.

Если события А1, А2 … попарно несовместны, то Р(А1+А2+…)=Р(А1)+Р(А2)+…

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю Р = 0.

Вероятность достоверного события равна единице Р = 1.

Вероятность произвольного случайного события А заключается между 0 и 1:

0 < Р(А) < 1.

**Пример 5**. Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

*Решение:* Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность .

События А и В называются *совместными*, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются *независимыми*, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(АВ)

**Пример 6.** Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

*Решение*: Т.к. события совместны, то 

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: Р(А+В)=Р(А)+Р(В).

Р(А)+Р()=1



*Условная вероятность* – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: Р(АВ)=Р(А)∙Р(А/В) или Р(ВА)=Р(А)∙Р(В/А)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: Р(АВ)=Р(А)∙Р(В).

**Пример 7**. В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

*Решение*: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки



Тогда вероятность того, что обе ручки красные: 

*Полная вероятность. Формула Байеса*

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий Н1, Н2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле



Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и , то выполняется равенство, называемое формулой Байеса: 

**Пример 1**. В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

*Решение*: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть Н1 – лампа из первой партии, Н2 – лампа из второй партии и Н3 – лампа из третьей партии. Тогда событие А/Н1 – лампа из первой партии проработает заданное время, А/Н2 – лампа из второй партии проработает заданное время и А/Н3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности



Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии



**Пример 2.** Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

*Решение*: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть Н1 – шар из первой урны, Н2 – шар из второй урны и Н3 – шар из третьей урны. Тогда событие А/Н1 – белый шар из первой урны, А/Н2 – белый шар из второй урны и А/Н3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности



*Формула Бернулли*

1. Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли 

**Пример 1**. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

*Решение:*



1. Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна 

**Пример 2.**  Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

*Решение*:



1. Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m1 и не более m2 раз вычисляется по формуле 

**Пример 3.**  Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

*Решение:*



1. Наивероятнейшее значение m0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле 

**Пример 4**. Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

*Решение*:



**Самостоятельные работы**

**Задание 1.** Найти: 1) 2) ; 3) ;



Решить уравнение: 4) ; 5) = 5m(m+1) ; 6) = 15



Проверить равенство: 7) - = ; 8) + = ;



Сократить: 9) ; 10) .



**Задание 2.** Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события A того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

**Задание 3.** Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбирается урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбирается урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбирается урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

**Задание 4**. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?

9. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

10. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

**Рекомендуемая литература**

**Основные источники**

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.:Образовательно-издательский центр «Академия», 2011.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по математике. – М: Издательский центр «Академия», 2011.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2012.
4. Дадаян А.А. Математика: учеб.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2010.

**Дополнительные источники**

1. Математика и информатика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В./ - М.: Издательский центр «Академия», 2009.
2. Омельченко В.П. Математика. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2006.